

Von der Parameterform zur Koordinatenform

Bestimme zu jeder Ebene eine Koordinatengleichung. Arbeite das Verfahren sauber Schritt für Schritt ab.

SO WANDELST DU UM - IN DREI SCHRITTEN

- 1 Normalenvektor bestimmen.** Suche einen Vektor $\vec{n}$ mit $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ (lineares Gleichungssystem lösen, eine **freie** Komponente wählen).
- 2 Linke Seite aufstellen.** Die Komponenten von $\vec{n}$ sind die Koeffizienten: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d$.
- 3 Absolutglied d berechnen.** Setze den Stützvektor $\vec{p}$ ein: $d = \vec{n} \cdot \vec{p}$.

! Benötigtes Hilfsmittel: Ihr sollt für Schritt 1 – das Lösen des linearen Gleichungssystems $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ – die **CASeasy+ App** verwenden.

Aufgabe 1

Gegeben ist die Ebene

GEGEBEN

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Bestimme eine Koordinatengleichung von E .

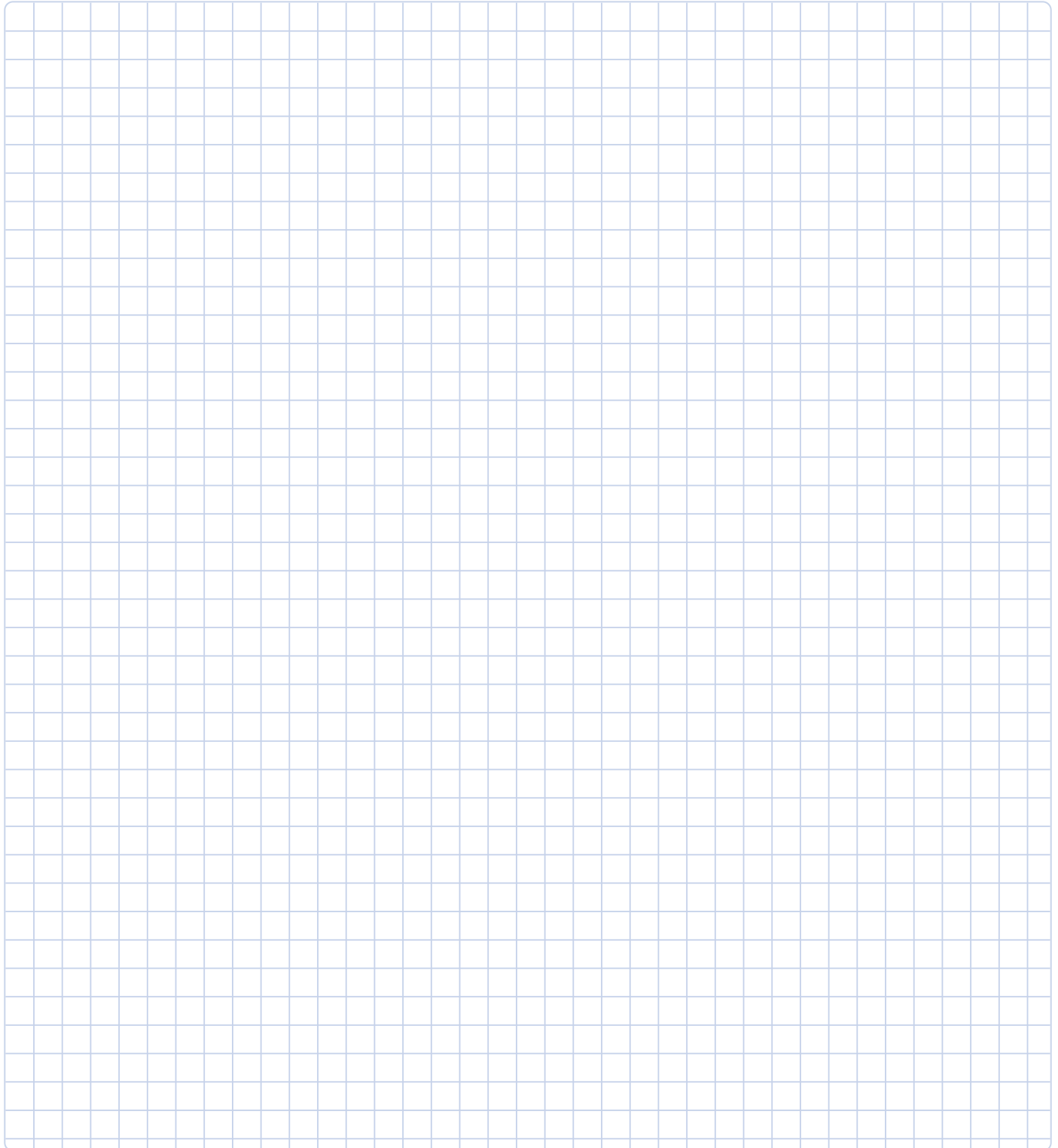
Aufgabe 2

Gegeben ist die Ebene

GEGEBEN

$$E: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Bestimme eine Koordinatengleichung von E . (Tipp: Welcher besondere Punkt liegt hier auf E , weil kein Stützvektor auftaucht?)



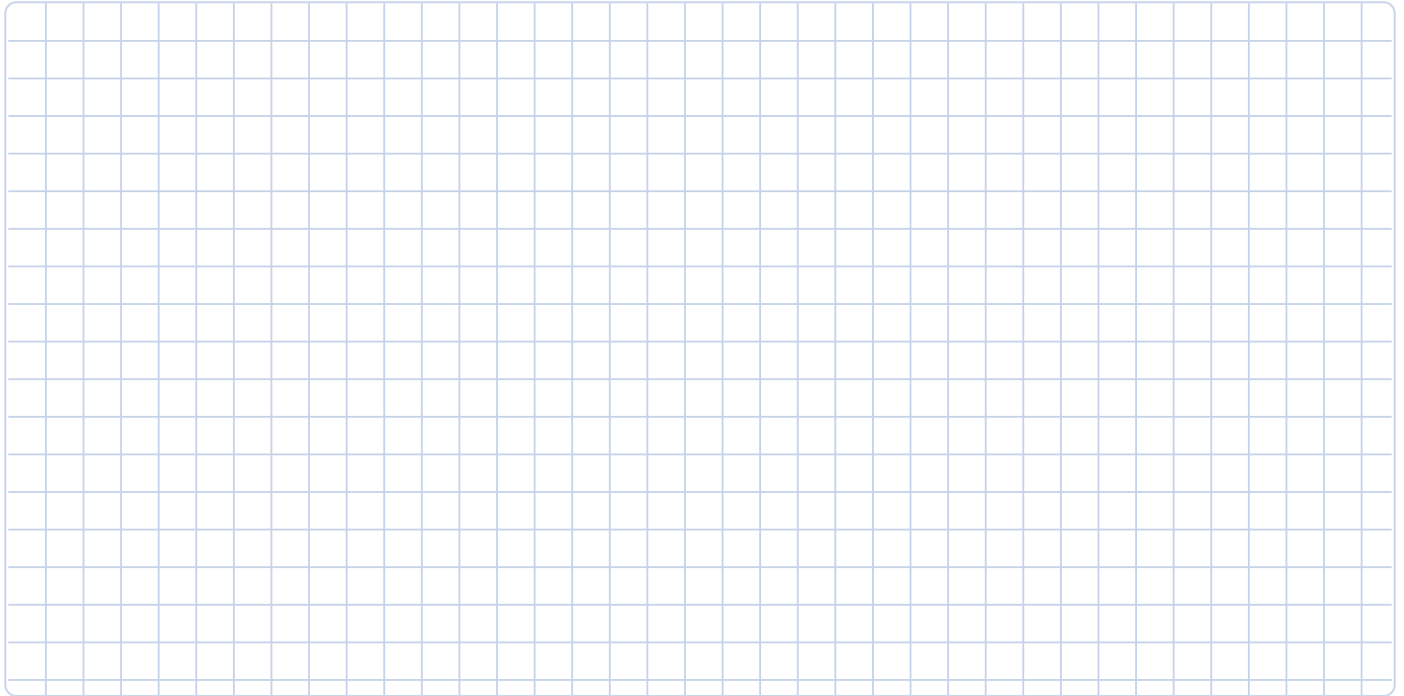
Extraaufgabe · ANWENDUNG - SOLAR-CARPORT

Ein Solar-Carport besitzt eine geneigte Dachfläche. In einem Koordinatensystem (Einheit: Meter) liegt sie in der Ebene

GEGEBEN

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- a) Bestimme eine Koordinatengleichung der Dachfläche.
b) Prüfe rechnerisch, ob der Befestigungspunkt $Q(0 \mid 5 \mid 2)$ auf der Dachfläche liegt.



Expertenaufgabe

- a) Gehe den Weg rückwärts: Gegeben ist die Koordinatenform $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$. Finde eine zugehörige Parameterform. (Tipp: Bestimme drei Punkte der Ebene, z. B. die Schnittpunkte mit den Achsen, und bilde daraus Stützvektor und Spannvektoren.)
b) Begründe allgemein, warum man d immer durch Einsetzen des Stützvektors $\vec{p}$ erhält, also $d = \vec{n} \circ \vec{p}$.



Lösungen · Lehrerexemplar

Nur zur Hand der Lehrkraft – nicht austeilern. Der Normalenvektor ist nur bis auf skalare Vielfache eindeutig; entsprechend skalierte Lösungen sind ebenfalls korrekt.

Aufgabe 1

$$\vec{n} \circ \vec{u} = 0: n_1 + n_2 + n_3 = 0$$

$$\vec{n} \circ \vec{v} = 0: n_2 + 3n_3 = 0$$

CASeasy+ liefert $n_1 = 2n_3$, $n_2 = -3n_3$. Wähle $n_3 = 1 \Rightarrow n_1 = 2$, $n_2 = -3$.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$d = \vec{n} \circ \vec{p} = 2 \cdot 1 + (-3) \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 4$$

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4$$

Aufgabe 2

Kein Stützvektor angegeben $\Rightarrow$ der Ursprung $O(0|0|0)$ liegt auf E , also $\vec{p} = \vec{0}$ und $d = 0$.

$$\vec{n} \circ \vec{u} = 0: 2n_1 + n_2 + 2n_3 = 0$$

$$\vec{n} \circ \vec{v} = 0: n_1 + n_2 + 5n_3 = 0$$

Wähle $n_3 = 1 \Rightarrow n_1 = 3$, $n_2 = -8$.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3x_1 - 8x_2 + x_3 = 0$$

Extraaufgabe (Solar-Carport)

$$\text{a) } \vec{n} \circ \vec{u} = 0: -4n_1 + 2n_3 = 0 \Rightarrow n_3 = 2n_1$$

$$\vec{n} \circ \vec{v} = 0: 3n_2 = 0 \Rightarrow n_2 = 0$$

Wähle $n_1 = 1 \Rightarrow n_3 = 2$.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$d = \vec{n} \circ \vec{p} = 1 \cdot 4 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 4$$

$$x_1 + 2x_3 = 4$$

b) $Q(0|5|2)$ einsetzen: $0 + 2 \cdot 2 = 4$. Stimmt $\Rightarrow Q$ liegt auf der Dachfläche.

Expertenaufgabe

a) Achsenschnittpunkte von $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$: $A(4 \mid 0 \mid 0)$, $B(0 \mid 8 \mid 0)$, $C(0 \mid 0 \mid 4)$.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(Spannvektoren = $B - A$ und $C - A$.)

b) Jeder Punkt X der Ebene erfüllt $\vec{n} \circ \vec{x} = d$. Der Stützvektor $\vec{p}$ ist Ortsvektor eines Ebenenpunktes, also gilt insbesondere $\vec{n} \circ \vec{p} = d$. Damit liefert das Einsetzen von $\vec{p}$ stets den Wert von d .